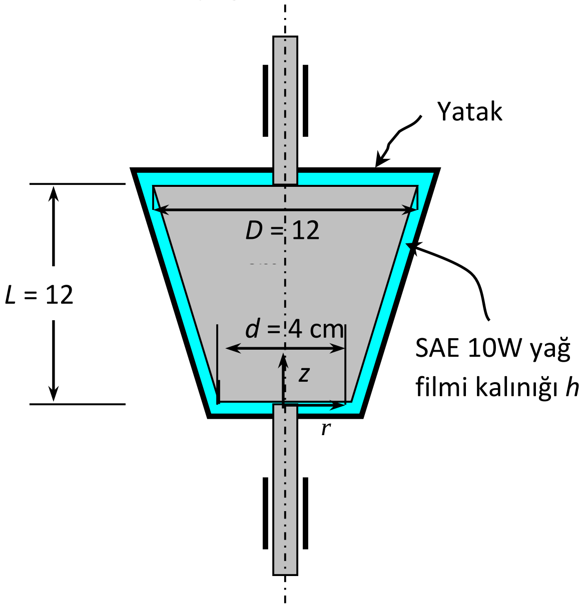
2015-2016 GÜZ DÖNEMİ AKIŞKANLAR MEKANİĞİ ÇÖZÜMLÜ SORULARI

Bölüm 2-3

Prof. Dr. Tahsin Engin

2-46 Kesik koni şeklindeki bir cisim şekilde görüldüğü gibi içerisi 20°C sıcaklıktaki SAE 10W yağıyla doldurulmuş (μ = 0.1 Pa·s) bir kapta 200 rad/s sabit hızla döndürülmektedir. Eğer cismin tüm yanlarındaki yağ filmi kalınığı 1.2 mm ise bu hareketi sağlamak için gerekli gücü hesaplayınız. Ayrıca sıcaklığın 80°C'ye çıkması halinde (μ = 0.0078 Pa·s) bu güç girişinde meydana gelecek olan yüzde azalmayı belirleyiniz.

ÇÖZÜM Kesik koni şeklindeki bir cisim sabit bi açısal hızla bir yağ kutusunun içerisinde dönmektedir. Bu hızda cisimi döndürmek için gerekli olan güç ve yağın sıcaklığının artması durumunda bu güçteki değişim hesaplanacaktır.



Kabuller Yağ filminin kalınlığı sabittir.

Özellikler Yağın dinamik viskozitesi 20°C'de μ = 0.1 Pa·s = 0.1 N·s/m^2 ve 80°C'de 0.0078 Pa·s'dir.

Analiz Film kalınlığının h olduğu her yerde hız gradyanı V/h olmalıdır. V hızı herhangi bir noktadaki açısal hız dikkate alınarak $V = \omega r$ olarak hesaplanır. Böylece cismin yüzeyleri üzerinde herhangi bir noktadaki kayma gerilmesi dönme ekseni ile yüzey arasındaki mesafe r kabul edilirse;

$$\tau_{du\,\mathrm{var}} = \mu \frac{du}{dr} = \mu \frac{V}{h} = \mu \frac{\omega r}{h}$$

olarak elde edilir. Yüzey üzerinde diferansiyel bir alan elemanı olan dA'ya etkine kayma gerilmesi ve bununla ilişkili olarak oluşan tork ve böylece mili döndürmek için gerekli olan güç;

$$dF = \tau_w dA = \mu \frac{\omega r}{h} dA \qquad d\mathrm{T} = r dF = \mu \frac{\omega r^2}{h} dA$$

$$\mathrm{T} = \frac{\mu\omega}{h}\int_A r^2 dA \qquad \dot{W}_{\mathrm{mil}} = \omega \mathrm{T} = \frac{\mu\omega^2}{h}\int_A r^2 dA$$

<u>**Üst yüzey:**</u> Üst yüzey için, $dA = 2\pi r dr$'dır. Yerine konularak integre edilirse;

$$\dot{W}_{\mathrm{mil,üst}} = \frac{\mu\omega^2}{h}\int_{r=0}^{D/2} r^2(2\pi r)dr = \frac{2\pi\mu\omega^2}{h}\int_{r=0}^{D/2} r^3 dr = \frac{2\pi\mu\omega^2}{h}\left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=0}^{D/2} = \frac{\pi\mu\omega^2 D^4}{32h}$$

elde edilir.

<u>Alt yüzey</u>: Üst yüzey için elde edilen formülde D yerine d konulursa alt yüzeydeki toplam tork elde edilir.

$$\dot{W}_{\text{mil,alt}} = \frac{\pi\mu\omega^2 d^4}{32h}$$

<u>Yan yüzeyler</u>: Yan yüzeyler için diferansiyel alan $dA = 2\pi r dz$ şeklinde ifade edilir. Geometrik ilişkiler dikkate alındığında yarıçapın eksene göre değişimi

$$r = \frac{d}{2} + \frac{D-d}{2L} z$$

şeklinde ifade edilir.

Bu mesafe diferansiyel eleman için $dr = \dfrac{D-d}{2L} dz$ veya $dz = \dfrac{2L}{D-d} dr$ şeklinde yazılabilir. Böylece difeansiyel alan elemanı, $dA = 2\pi dz = \dfrac{4\pi L}{D-d} r dr$ olur. Yerine konularak integre edilirse;

$$\dot{W}_{\text{mil,yan}} = \frac{\mu\omega^2}{h} \int_{r=0}^{D/2} r^2 \frac{4\pi L}{D-d} r dr = \frac{4\pi\mu\omega^2 L}{h(D-d)} \int_{r=d/2}^{D/2} r^3 dr = \frac{4\pi\mu\omega^2 L}{h(D-d)} \left. \frac{r^4}{4} \right|_{r=d/2}^{D/2} = \frac{\pi\mu\omega^2 L(D^2 - d^2)}{16h(D-d)}$$

Bu üç ifadenin toplamından toplam güç;

$$\dot{W}_{\text{mil, toplam}} = \dot{W}_{\text{mil,üst}} + \dot{W}_{\text{mil,alt}} + \dot{W}_{\text{mil,yan}} = \frac{\pi\mu\omega^2 D^4}{32h} \left[1 + (d/D)^4 + \frac{2L[1-(d/D)^4)]}{D-d} \right] \text{ olur.}$$

$d/D = 4/12 = 1/3$ olduğu dikkate alınarak yerine konulursa;

$$\dot{W}_{\text{mil,toplam}} = \frac{\pi(0.1\,\text{N}\cdot\text{s/m}^2)(200/\text{s})^2(0.12\,\text{m})^4}{32(0.0012\text{m})} \left[1 + (1/3)^4 + \frac{2(0.12\,\text{m})[1-(1/3)^4)]}{(0.12-0.04)\,\text{m}} \right] \left(\frac{1\,\text{W}}{1\,\text{Nm/s}} \right) = \mathbf{270\ W}$$

Dikkat edilirse güç ifadesi viskozite ile doğru orantılıdır. Sıcaklık değişiminin sadece viskoziteyi etkilediği dikkate alınırsa 80°C için gereken güç miktarı;

$$\dot{W}_{\text{mil,toplam,80°C}} = \frac{\mu_{80°C}}{\mu_{20°C}} \dot{W}_{\text{sh, total,20°C}} = \frac{0.0078\,\text{N}\cdot\text{s/m}^2}{0.1\,\text{N}\cdot\text{s/m}^2}(270\,\text{W}) = 21.1\text{W}$$

Böylece, 80°C için verilmesi gereken güçteki azalma miktarı;

$$Azalma = \dot{W}_{mil,toplam,20°C} - \dot{W}_{mil,toplam,80°C} = 270 - 21.1 = 249\ W$$

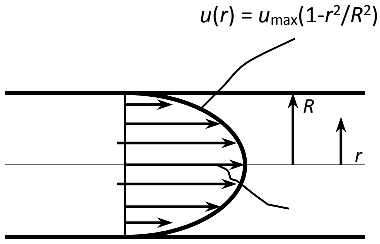
olarak elde edilir. Bu, yaklaşık olarak %92 oranında bir azalmadır.

İrdeleme Viskoz bir sıvıda kayma gerilmesini yenmek için gerekli olan kuvvetler sıcaklığa büyük oranda bağlıdır.

2-53 Girişten uzak bölgelerde, bir boru içerisindeki akış bir boyutludur ve laminer akış için hız profili $u(r) = u_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ olup burada R borunun yarıçapı, r boru merkezine olan radyal mesafe ve $u_{\max}$ boru ekseninde oluşan maksimum akış hızıdır. (a) L uzunluğundaki boru bölümüne akışkanın uyguladığı direnç kuvveti için bir bağıntı elde ediniz ve (b) 20 C'deki su akışı için R=0.08 m, L=15 m, $u_{\max}$ = 3 m/s ve μ =0.0010 kg/m.s alarak oluşan direnç kuvvetini hesaplayınız.

ÇÖZÜM Laminer ve bir boyutlu bir akışın dairesel bir boru için hız profili verilmiştir. Boru üzerine gelen direnç kuvveti ve su için bu kuvetin sayısal değeri hesaplanacaktır.

Kabuller **1** Dairesel boru boyunca akış bir boyutludur. **2** Akışkan newtonian bir akışkandır.



Özellikler Suyun 20°C için viskozitesi 0.0010 kg/m·s'dir.

Analiz

$$u(r) = u_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

şeklinde verilen hız profilinde R borunun yarıçapı, r merkezden olan radyal mesafe ve $u_{\max}$ merkezde r = 0 oluşan maksimum akış hızıdır. Boru yüzeyindeki kayma gerilmesi;

$$\tau_{du\,\mathrm{var}} = -\mu \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=R} = -\mu u_{\max} \frac{d}{dr}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)_{r=R} = -\mu u_{\max} \left.\frac{-2r}{R^2}\right|_{r=R} = \frac{2\mu u_{\max}}{R}$$

olarak ifade edilir. Boru akışında *du/dr* negatiftir ve ifadesinin başına büyüklüğü pozitif akış yönünde pozitif yapmak için eksi işareti konulur. (Veya $y = R - r$ olduğu için $du/dr = -du/dy$). Böylece iç yüzeylere etkiyen direnç kuvveti;

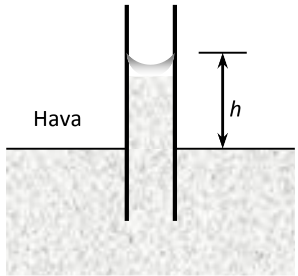
$$F_D = \tau_{du\,\mathrm{var}} A_{y\ddot{u}zey} = \frac{2\mu u_{\max}}{R}(2\pi RL) = 4\pi\mu L u_{\max}$$

olur. Değerler yerine konulursa;

$$F_D = 4\pi\mu L u_{\max} = 4\pi(0.0010\,\mathrm{kg/m\cdot s})(15\,\mathrm{m})(3\,\mathrm{m/s})\left(\frac{1\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{kg\cdot m/s^2}}\right) = \mathbf{0.565\ N}$$

İrdeleme Giriş bölgesinde ve türbülanslı akışta duvar kenarındaki hız gradyanı daha büyüktür ve dolayısıyla böyle durumlarda etki eden direnç kuvvetleri daha büyük olur.

2-61 1.9 mm çapındaki bir boru, yoğunluğu 900 kg/m^3 olan ve ne olduğu bilinmeyen bir sıvı içerisine daldırıldığında, sıvının boru içerisinde 5 mm yükseldiği ve 15°'lik temas açısı yaptığı gözlenmiştir. Sıvının yüzey gerilimini belirleyiniz.



ÇÖZÜM Cam bir tüp sıvının içerisine daldırılmıştır ve kılcallık etkisi ile oluşan yükselme ölçülecektir. Sıvının yüzey gerilimi hesaplanacaktır.

Kabuller **1** Sıvıda saflığı bozacak herhangi bir katkı maddesi ve cam yüzeyinde herhangi bir kirlilik yoktur. **2** Sıvı atmosfere açıktır.

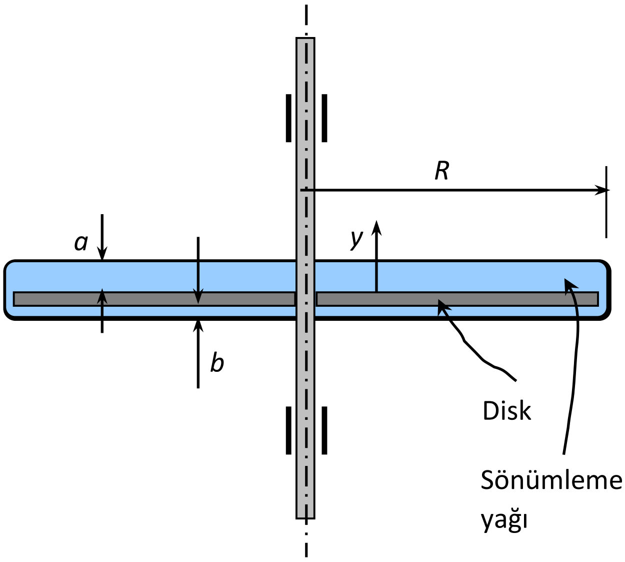
Özellikler Sıvının yoğunluğu 960 kg/m^{3}olarak verilmiştir. Temas açısı ise 15°olarak verilmiştir.

Analiz Sayısal değerler yerine konulursa kılcallık etkisindeki yüzey gerilimi aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$\sigma_s = \frac{\rho g R h}{2\cos\phi} = \frac{(960\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)(0.0019/2\,\text{m})(0.005\text{m})}{2(\cos 15°)}\left(\frac{1\,\text{N}}{1\,\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = \mathbf{0.0232\,N/m}$$

İrdeleme Yüzey gerilimi sıcaklığa bağlı olarak değiştiği için buradaki çözüm sabit bir sıcaklık için geçerlidir.

2-75 Bazı (titreşim) sönümleme sistemlerinde, şekilde gösterildiği gibi yağa daldırılmış dairesel bir disk kullanılır. Böyle bir sistemde sönümleme torkunun $T_{\text{sönümleme}} = C\omega$ uyarınca açısal hızla doğru orantılı olarak değiştiğini gösteriniz. Bu ifadede $C = 0.5\pi\mu(1/a + 1/b)R^4$ olarak verilmektedir. Diskin her iki tarafındaki hız profillerini doğrusal alınız ve disk ucu etkilerini ihmal ediniz.



ÇÖZÜM Şekilde gösterilen yağın içerisine daldırılmış bir dairesel disk damper olarak kullanılmaktadır. Sönümleme torku $C = 0.5\pi\mu(1/a + 1/b)R^4$ için $T_{\text{sönümleme}} = C\omega$ olduğu gösterilecektir.

Kabuller **1** Yağ kalınlığı her bir noktada sabittir. **2** Hız profili diskin her iki tarafında da doğrusaldır. **3** Uç noktalardaki viskoz etkiler ihmal edilmiştir. **4** Milin viskoz etkileri ihmal edilmiştir.

Analiz Film kalınlığının *a* olduğu her yerde hız gradyanı *V*/*a*'dır. Teğetsel hız *V* = ω*r* şeklinde ifade edilir. Diskin üst yüzeyinde dönme merkezinden *r* mesafede herhangi bir noktadaki kayma gerilmesi;

$$\tau_{du\,\text{var}} = \mu\frac{du}{dr} = \mu\frac{V}{h} = \mu\frac{\omega r}{h}$$

şeklinde ifade edilir. Diferansiyel eleman *dA*'ya etkiyen kayma gerilmesi ve bunun neticesinde oluşan tork ise;

$$dF = \tau_w dA = \mu\frac{\omega r}{a}dA$$

$$d\mathrm{T} = rdF = \mu\frac{\omega r^2}{a}dA$$

olur. $dA = 2\pi r dr$ olduğuna göre, integre edilirse üst yüzeydeki tork;

$$\mathrm{T}_{\text{top}} = \frac{\mu\omega}{a}\int_A r^2 dA = \frac{\mu\omega}{a}\int_{r=0}^{R} r^2(2\pi r)dr = \frac{2\pi\mu\omega}{a}\int_{r=0}^{R} r^3 dr = \frac{2\pi\mu\omega}{a}\left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=0}^{R} = \frac{\pi\mu\omega R^4}{2a}$$

olarak ifade edilir. Alt yüzeydeki torku bulmak için *a* yerine *b* konulur.

$$\mathrm{T}_{\text{bottom}} = \frac{\pi\mu\omega R^4}{2b}$$

Disk üzerine etki eden toplam tork alt ve üst yüzeylerin oluşturduğu

torkun toplamıdır.

$$\mathrm{T}_{\text{toplam sönümleme}} = \mathrm{T}_{\text{alt}} + \mathrm{T}_{\text{üst}} = \frac{\pi\mu\omega R^4}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

veya

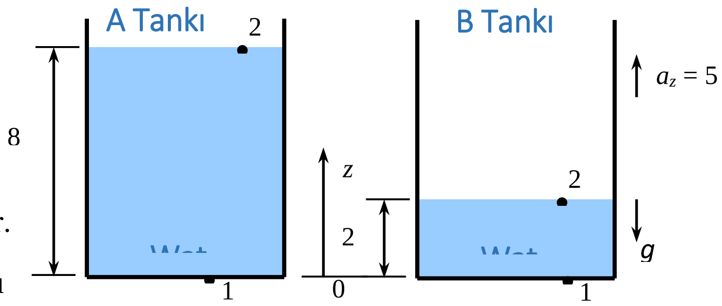
$$C = \frac{\pi\mu R^4}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \quad \text{için} \quad \mathrm{T}_{\text{toplam sönümleme}} = C\omega$$

olmaktadır. Böylece formül ispat edilmiş olur.

İrdeleme Sönümleme torku (yani sönümleme gücü) her iki yüzey için yağ filmi kalınlığı ile ters orantılıdır ve yarıçapın 4.kuvveti ile orantılıdır.

3-95 Suyla dolu iki tank düşününüz. Birinci tank 8 m yüksekliğinde ve durgun halde, ikincisi ise 2 m yüksekliğinde ve yukarı doğru 5 m/s^2 sabit ivmesiyle hareket etmektedir. Hangi tankın tabanındaki basınç daha fazladır?

ÇÖZÜM İki adet su dolu tanktan bir tanesi durgun halde, diğeri ise yukarıya doğru sabit bir ivme ile hızlanmaktadır. Hangi tankın en alt noktasında daha yüksek bir basınç oluştuğu hesaplanacaktır.



Kabuller **1** İvme sabittir. **2** Su sıkıştırılamaz bir akışkandır.

Özellikler Suyun yoğunluğu 1000 kg/m^3'dür.

Analiz Sıkıştırılamaz bir akışkan için 1 ile 2 noktaları arasındaki basınç farkı;

$P_2 - P_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1)$ veya $a_x = 0$ şartı için $P_2 - P_1 = \rho(g + a_z)(z_2 - z_1)$

olarak hesaplanır.

2 noktası suyun serbest yüzeyi ve 1 noktası tankın en alt noktası olarak seçilirse, $P_2 = P_{atm}$ ve $z_2 - z_1 = h$ olur, böylece;

$$P_{1,\,\mathrm{etkin}} = P_{\mathrm{alt}} = \rho(g + a_z)h$$

olarak elde edilir.

A Tankı : $a_z = 0$, olduğu için en alt noktadaki basınç;

$$P_{A,\,\mathrm{alt}} = \rho g h_A = (1000\,\mathrm{kg/m^3})(9.81\,\mathrm{m/s^2})(8\,\mathrm{m})\left(\frac{1\,\mathrm{kN}}{1000\,\mathrm{kg\cdot m/s^2}}\right) = 78.5\,\mathrm{kN/m^2}$$

B Tankı: $a_z = +5$ m/s^2 olduğu için en alt noktadaki basınç;

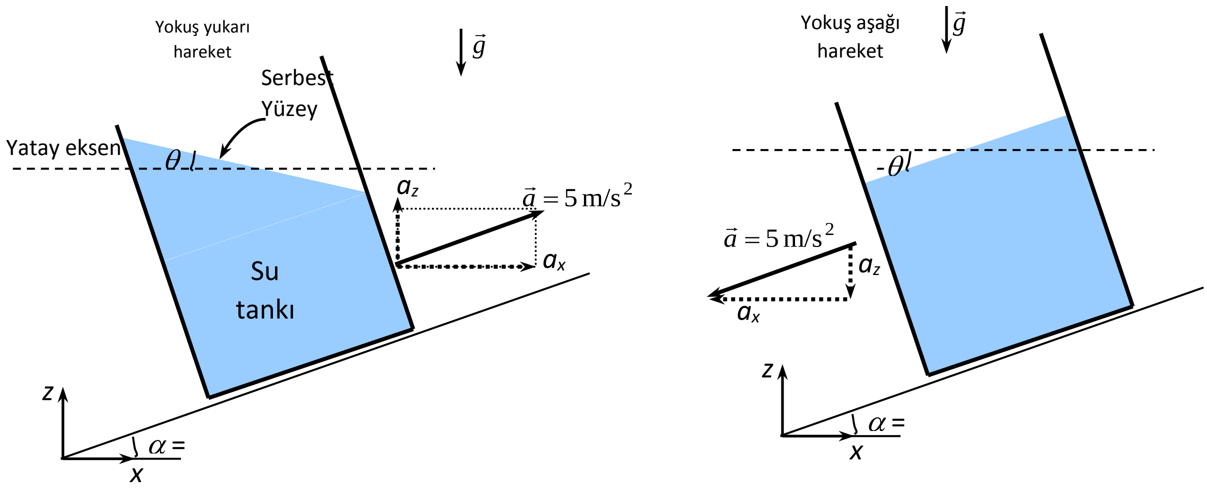
$$P_{B,\,\mathrm{alt}} = \rho(g + a_z)h_B = (1000\,\mathrm{kg/m^3})(9.81 + 5\,\mathrm{m/s^2})(2\,\mathrm{m})\left(\frac{1\,\mathrm{kN}}{1000\,\mathrm{kg\cdot m/s^2}}\right) = 29.6\,\mathrm{kN/m^2}$$

Sonuç olarak, **A tankının en alt noktasındaki basıncının daha büyük olduğu görülür.**

İrdeleme Bu problemi $P_{\mathrm{alt}} = \rho(g + a_z)h$ ilişkisini kullanarak da kolaylıkla çözebiliriz. B tankının ivmesi A tankının ivmesinin yaklaşık 1.5 katıdır (14.81 vs 9.81 m/s^2), fakat A tankının su yüksekliği B tankının su yüksekliğinden 4 kat daha fazla olduğu için en alt noktadaki basınç daha büyük olmaktadır.

3-96 Bir su tankı, yatayla 20° açı yapan yokuş yukarı bir yolda hareket yönündeki 5 m/s^2 sabit ivme ile çekilmektedir. Suyun serbest yüzeyinin yatayla yaptığı açıyı bulunuz. Aynı yolda ve aynı ivmeyle hareket yönü aşağıya doğru olsaydı cevabınız ne olurdu?

ÇÖZÜM Bir su tankı yokuş bir zeminde sabit bir ivmeyle hareket etmektedir. Suyun yatay düzlem ile yaptığı açı hesaplanacaktır ve aynı çözüm tankın yokuş aşağıya doğru hızlandığı durum için tekrar edilecektir.



Kabuller **1** Sudaki çalkalanma, yoldaki pürüzlülük veya kasisler ikinci derecede önemlidir ve dikkate alınmamıştır. **2** İvme sabittir.

Analysis x ve z eksenleri şekilde gösterildiği gibidir. Geometrik ilişkiler dikkate alındığında yatay ve dikey ivme bileşenleri;

$$a_x = a\cos\alpha$$
$$a_z = a\sin\alpha$$

olur. Sıvı serbest yüzeyinin yatayla yaptığı açının tanjantı;

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g + a_z} = \frac{a\cos\alpha}{g + a\sin\alpha} = \frac{(5\ \mathrm{m/s^2})\cos 20°}{9.81\ \mathrm{m/s^2} + (5\ \mathrm{m/s^2})\sin 20°} = 0.4078 \quad \rightarrow \quad \theta = \mathbf{22.2°}$$

Hareket yönü ters çevrilirse

a_x ve a_z sırasıyla –x ve –z yönlerinde olurlar ve böylece negatif büyüklükler haline gelirler.

$$a_x = -a\cos\alpha$$
$$a_z = -a\sin\alpha$$

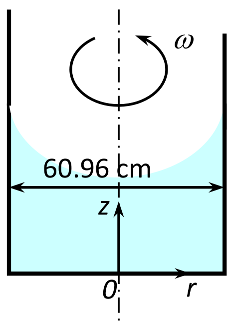
Bu durumda sıvı serbest yüzeyi ile yatay eksen arasındaki açının tanjantı;

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g + a_z} = \frac{a\cos\alpha}{g + a\sin\alpha} = \frac{-(5\ \mathrm{m/s^2})\cos 20°}{9.81\ \mathrm{m/s^2} - (5\ \mathrm{m/s^2})\sin 20°} = -0.5801 \quad \rightarrow \quad \theta = \mathbf{-\ 30.1°}$$

haline gelir.

İrdeleme Burada yapılan çözüm sabit yoğunluklu her sıvı için geçerlidir ve sadece su ile kayıtlı değildir. Başka bir değişle elde edilen açılar veya açıların elde edildiği fonksiyon, yoğunluğa bağlı değildir.

3-97 60.96 cm çapında, atmosfere açık düşey silindirik bir tankta başlangıçta 30.48 cm yüksekliğinde su bulunmaktadır. Tank, orta ekseni etrafında döndürülmekte ve su seviyesi ortada düşerken kenarlarda yükselmektedir. Tank tabanının açığa çıkmaya başlayacağı açısal hızı ve bu andaki maksimum su yüksekliğini hesaplayınız.



ÇÖZÜM Atmosfere açık düşey pozisyonda bir silindirik tank merkez ekseni etrafından döndürülmektedir. Tankın tabanının kuru hale gelmesi için gereken açısal hız hesaplanacak ve bu durumdaki maksimum su yükselmesi bulunacaktır.

Kabuller **1** Tank içerisindeki sıvının daima rijit cisim olarak hareket edebilmesi için dönme hızındaki artış çok yavaştır. **2** Su sıkıştırılamaz bir akışkandır.

Analiz Düşey silindirin alt merkezi orijin kabul edilirse (r = 0, z = 0), sıvı serbest yüzeyinin veren denklem;

$$z_s(r) = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)$$

olur. h_0 = 30.48 cm sıvının dönmeden önceki ilk yüksekliğidir. Alt yüzeyde kuru nokta oluşmadan hemen önce suyun merkezine ait yükseklik sıfırdır, yani $z_s(0)$ = 0'dır. Denklemde verilen giriş ve çıkış değerleri yerine konulursa;

$$\omega = \sqrt{\frac{4gh_o}{R^2}} = \sqrt{\frac{4(9.81\,\frac{m}{s^2})(0.3048\,m)}{(0.3048\,m)^2}} = 11.35\,rad/s$$

Bir tam turun 2π radyana tekabül ettiği hatırlanırsa, tankın açısal hızı devir/dakika cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\dot{n} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{11.35\,\text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad/dak}}\left(\frac{60\,\text{s}}{1\,\text{dak}}\right) = \mathbf{108\ \ d/d}$$

Böylece tankın zemininde hiç kuru yer kalmadan gerçekleştirilecek maksimum açısal hızın 108 d/d ile sınırlı kalması gerektiği anlaşılır.

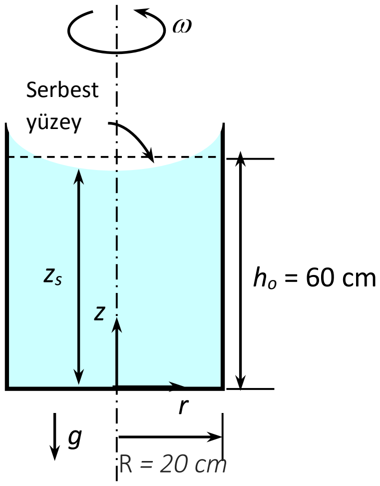
Bu durumda oluşan en büyük su yüksekliği tankın kenarlarında ($r = R$ = 0.3048 m), ve buradaki maksimum yükseklik;

$$z_s(R) = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} = (1\,\text{ft}) + \frac{(11.35\,\text{rad/s})^2(0.3048\text{m})^2}{4(9.81\,\text{m/s}^2)} = \mathbf{0.305\ m} = \mathbf{30.5\ cm}$$

İrdeleme Dikkat edilirse bu çözüm her sıvı için aynıdır. Çünkü çözüm yoğunluk ve diğer akışkan özelliklerinden bağımsızdır.

3-99 40 cm çapında ve 90 cm yüksekliğindeki düşey silindirik tank 60 cm yüksekliğine kadar suyla doludur. Tank 120 devir/dakika'lık sabit açısal hızla döndürüldüğünde silindir merkezindeki sıvı seviyesinin ne kadar alçalacağını hesaplayınız.

ÇÖZÜM Düşey doğrultuda duran bir silindirik tankın bir kısmı su ile doludur ve sabit bir açısal hızda döndürülmektedir. Silindirik tankın merkezinde, su seviyesinin alçalma miktarı hesaplanacaktır.



Kabuller **1** Tank içerisindeki sıvının daima rijit cisim olarak hareket edebilmesi için dönme hızındaki artış çok yavaştır. **2** Tankın alt yüzeyi su ile kaplıdır, herhangi bir kuru nokta oluşmamaktadır.

Analiz Eğer dönen silindirin taban yüzeyinin merkezini orijin noktası alırsak (r = 0, z = 0), sıvı serbest yüzeyini veren denklem;

$$z_s(r) = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)$$

olur. h_0 = 0.6 m dönmeye başlamadan önceki ilk yüksekliktir. Açısal hız rad/s cinsine dönüştürülürse;

$$\omega = 2\pi\dot{n} = 2\pi(120\,\text{d/d})\left(\frac{1\,\text{dak}}{60\,\text{s}}\right) = 12.57\,\text{rad/s}$$

Neticede dönme ekseni üzerindeki (r = 0) dik su yüksekliği;

$$z_s(0) = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} = (0.60\,\text{m}) - \frac{(12.57\,\text{rad/s})^2(0.20\,\text{m})^2}{4(9.81\,\text{m/s}^2)} = 0.44\,\text{m}$$

olur. Böylece dönme ekseni boyunca su seviyesindeki alçalma;

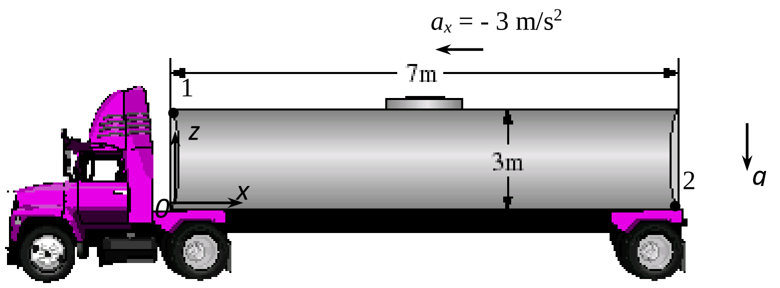
$$\Delta h_{\text{fark, merkez}} = h_0 - z_s(0) = 0.60 - 0.44 = \mathbf{0.16\ m}$$

olarak elde edilir.

İrdeleme Yapılan çözüm tüm sıvılar için geçerlidir. Sıvının yoğunluğu ve diğer özelliklerinden bağımsızdır. Ayrıca, kabın tabanında kuru nokta kalmadığı ön koşul olan $z_0(0)$, pozitif bir değer olduğu için doğru bir ön koşuldur.

3-102 Yoğunluğu 1020 kg/m^3 olan süt, düz bir yol üzerinde 7 m boyunda ve 3 m çapındaki silindirik bir tanker ile taşınacaktır. Tanker tamamen süt ile dolu (hava boşluğu yok) ve 2.5 m/s^2 ile ivmelenmektedir. Tankerdeki minimum basınç 100 kPa olduğuna göre maksimum basınç farkını ve maksimum basıncın oluştuğu yeri belirleyiniz.

Solution Tamamen doldurulmuş yatay silindirik bir tanker ile sabit bir ivme ile hızlanarak süt taşınacaktır. Tankerdeki maksimum basınç farkı hesaplanacaktır.



Kabuller **1** İvme sabittir **2** Süt sıkıştırılamaz bir sıvıdır.

Özellikler Sütün yoğunluğu 1020 kg/m^3'dür.

Analiz *x* ve *z* eksenleri şekilde gösterildiği gibi seçilsin. Yatay yöndeki ivme negatif x yönünde olacaktır, dolayısıyla a_x negatiftir. Dik yönde ise ivme yoktur dolayısıyla a_z = 0'dır. Sıkıştırılamaz ve lineer hareket yapan bir sıvı için 1 ve 2 noktası arasındaki basınç farkı;

$$P_2 - P_1 = -\rho a_x (x_2 - x_1) - \rho (g + a_z)(z_2 - z_1) \quad \rightarrow \quad P_2 - P_1 = -\rho a_x (x_2 - x_1) - \rho g (z_2 - z_1)$$

şeklinde hesaplanır. İlk terim yatay yöndeki ivme neticesinde suyun arka yöne doğru basıncının artmasını gösterirken, ikinci terim yerçekimi etkisi ile aşağılara doğru hidrostatik basınç artışını gösterir. Bu prensipten yola çıkarsak tankerdeki en düşük basınç 1 noktasında (üst ön nokta) olurken, en yüksek basınç ise 2 noktasında (alt arka nokta) oluşur. Bu iki nokta arasındaki basınç farkı hesaplanırsa, maksimum basınç farkı;

$$\Delta P_{\max} = P_2 - P_1 = -\rho a_x (x_2 - x_1) - \rho g (z_2 - z_1) = -[a_x (x_2 - x_1) + g (z_2 - z_1)]$$

$$= -(1020\,\text{kg/m}^3)\left[(-2.5\,\text{m/s}^2)(7\,\text{m}) + (9.81\,\text{m/s}^2)(-3\,\text{m})\right]\left(\frac{1\,\text{kN}}{1000\,\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$

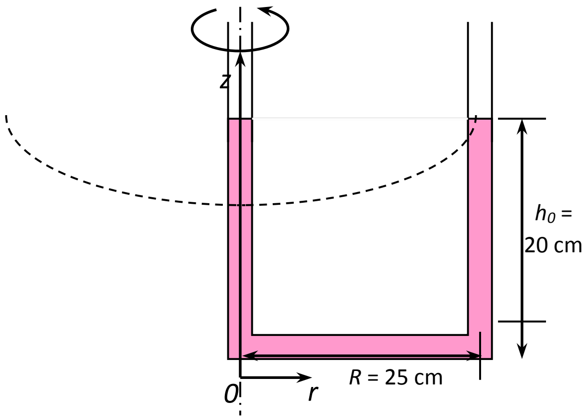
$$= (17.9 + 30.0)\,\text{kN/m}^2 = \mathbf{47.9\ \ kPa}$$

olur. Buradaki x_1 = 0, x_2 = 7 m, z_1 = 3 m ve z_2 = 0'dır.

İrdeleme Dikkate edilirse yatay yöndeki basınç değişimi yatay yöndeki ivmeden kaynaklanmakta iken, dikey yöndeki basınç değişimi yerçekimi etkisinden ve dikey yöndeki ivmeden oluşmaktadır (Bu soru için dikey yöndeki ivme sıfırdır).

3-104 Atmosfere açık kollarının merkezleri arasındaki mesafe 25 cm olan bir U borusunun her iki kolunda 20 cm yüksekliğinde alkol bulunmaktadır. U borusunun sol kolu etrafında 4.2 rad/s'lik bir açısal hızla döndürülmesi durumunda iki koldaki akışkan seviyeleri arasındaki fark ne olur?

ÇÖZÜM Dik eksende bulunan bir U borusu bir miktar alkol ile doldurulmuştur ve dik eksende sabit bir hızla bir kolu etrafında döndürülmektedir. İki koldaki akışkan seviyeleri arasındaki fark hesaplanacaktır.



Kabuller **1** Alkol sıkıştırılamaz bir akışkandır.

Analiz U borusunun sol kolunun en alt noktası orijin olarak seçilirse (r = 0, z = 0), sıvı serbest yüzeyini veren formül aşağıdaki şekilde olur;

$$z_s(r) = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)$$

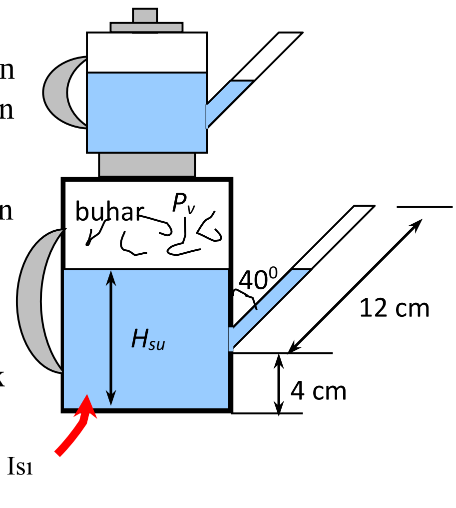
buradaki h_0 = 0.20 m dönme öncesindeki ilk yüksekliktir. Açısal hız ω = 4.2 rad/s'dir. Sol koldaki (dönme merkezi) su seviyesine göre sağ koldaki yükselme;

$$\Delta h = z_s(R) - z_s(0) = \left(h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right) - \left(h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right) = \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{(4.2\,\text{rad/s})^2(0.25\,\text{m})^2}{2(9.81\,\text{m/s}^2)} = \mathbf{0.056\ m}$$

İrdeleme Yapılan çözüm yoğunluğa veya diğer akışkan özelliklerine bağlı olmadığı için tüm sıvılar için geçerlidir.

3-129 Şekilde görüldüğü gibi, üzerinde demlik bulunan bir çaydanlık çay demlemede kullanılmaktadır. Demlik, buhar kaçışına kısmen engel olabilmekte ve bu da çaydanlık içerisindeki basıncın yükselmesine ve dolayısıyla çaydanlık emziğinden sıcak suyun taşmasına neden olmaktadır. Isıl genleşmeyi göz ardı ederek ve emzikte bulunan su miktarındaki değişimi çaydanlıktaki su miktarının yanında ihmal ederek, buhar etkin basıncının 0.32 kPa değerine kadar çaydanlıktan bir taşmaya yol açmayacak maksimum soğuk su yüksekliğini (h) belirleyiniz.

ÇÖZÜM Çaydanlıktaki basınç oluşumu suyun emzikten taşmasına neden olmaktadır. Belirli bir etkin basınçta bu taşmanın olmaması için maksimum soğuk su yüksekliği hesaplanacaktır.



Kabuller **1** Su sıkıştırılamaz akışkandır. **2** Çaydanlıkta suyun genleşmesi ihmal edilmiştir. **3** Soğuk su sıcaklığı 20°C'dir.

Özellikler 20°C'de suyun yoğunluğu ρ_{su} = 998.0 kg/m^3'dir.

Analiz Geometrik bağıntılar dikkate alındığında çaydanlık ile emzik ucu arasındaki dik uzunluk;

$$h_{uç} = 4 + 12\cos 40° = 13.2\,\text{cm'dir.}$$

Bu yükseklik eğer çaydanlığın içinde hiç basınç olmaz ise suyun yükseleceği maksimum yükseklidir. Çaydanlığın içerisindeki atmosferik basıncın üzerine çıkan buhar basıncı emzik içerisindeki su sütunu ile dengelenmelidir.

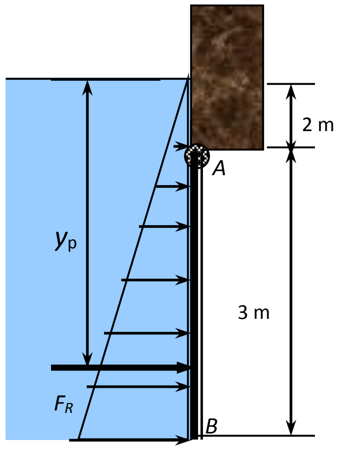
$$P_{\text{v, etkin}} = \rho_{su} g \Delta h_{su}$$

veya,

$$\Delta h_{\text{su}} = \frac{P_{\text{v, etkin}}}{\rho_{\text{su}} g} = \frac{0.32\,\text{kPa}}{(998.0\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)}\left(\frac{1000\,\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{1\,\text{kN}}\right)\left(\frac{1\,\text{kN/m}^2}{1\,\text{kPa}}\right) = 0.033\,\text{m} = 3.3\,\text{cm}$$

Böylece, çaydanlıktaki ilk konulan soğuk su seviyesinin emziğin ucundan en az 3.3 cm aşağıda olması gerektiği anlaşılır. Böylece taşmanın olmaması için başlangıçtaki soğuk su seviyesi;

$$h_{\text{su, max}} = h_{\text{uç}} - \Delta h_{su} = 13.2 - 3.3 = \mathbf{9.9\ cm}$$



3-139 3 m yüksekliğinde ve 6 m genişliğindeki dikdörtgen şekilli kapak üst kenarındaki A noktasından mafsallanmış olup B noktasındaki sabit bir çıkıntı ile açılması engellenmiştir. 5 m yüksekliğindeki su tarafında kapağa uygulanan kuvveti ve basınç merkezini belirleyiniz.

ÇÖZÜM Dikdörtgen bir kapak yatay eksende üst ucundan mafsallanmış ve alt ucundan bir takoz ile sabitlenmiştir. Kapak üzerinden takoza gelen kuvvet hesaplanacaktır.

Kabuller Atmosferik basınç kapağın her iki yanından etki etmektedir. Bu yüzden hesaplamalarda etkisi yoktur.

Özellikler Suyun yoğunluğu tüm alan için 1000 kg/m^3 alınacaktır.

Analiz Bir yüzeye gelen ortalama basınç o yüzeyin alan merkezine etki eder. Bu basınç tüm alan ile çarpılır ise bu bize toplam (bileşke) hidrostatik kuvveti verir.

$$F_R = P_{\text{avg}} A = \rho g h_C A$$

$$= \left(1000\ \text{kg/m}^3\right)\left(9.81\ \text{m/s}^2\right)\left(3.5\ \text{m}\right)\left(3\times 6\ \text{m}^2\right)\left(\frac{1\ \text{kN}}{1000\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$

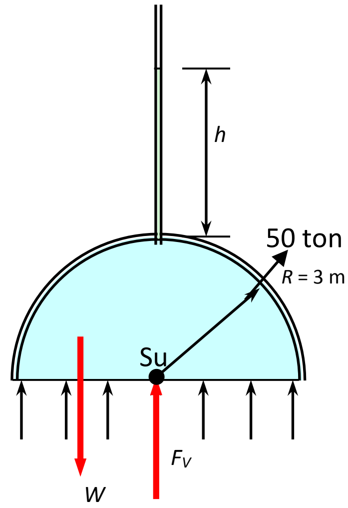
$$= \mathbf{618\ kN}$$

Kuvvetin dik etki noktası uzaklığı serbest yüzeyden itibaren aşağıdaki formül ile bulunabilir.

$$y_P = s + \frac{b}{2} + \frac{b^2}{12(s+b/2)} = 2 + \frac{3}{2} + \frac{3^2}{12(2+3/2)} = \mathbf{3.71\ m}$$

İrdeleme A noktasındaki momentin sıfır olması için B noktasından etki etmesi gereken kuvveti hesaplayabilirsiniz.

3-142 Düz bir zemin üzerinde bulunan 50 ton'luk 6 m çapındaki yarım küre şekilli kubbe şekilde gösterildiği gibi suyla doldurulmuştur. Bir kimse bu kubbeyi Pascal ilkesini kullanmak suretiyle kaldırabileceğini ve bunu da kubbe tepesine bağlayacağı bir boruyu suyla doldurarak yapacağını öne sürmektedir. Kubbeyi kaldırmak için borudaki su yüksekliğinin ne olması gerektiğini hesaplayınız. Borunun ve içerisindeki suyun ağırlıklarını göz ardı ediniz.



ÇÖZÜM Yarıküre şeklindeki içerisi su dolu bir kubbe, üzerinden içerisine su eklenen uzun bir tüp yardımıyla kaldırılacaktır. Kubbenin kaldırılması için gerekli olan su yüksekliği hesaplanacaktır..

Kabuller **1** Atmosferik basınç kubbenin her iki yönünden de etki etmektedir, bu yüzden etkisi yoktur. **2** Tüpün ve tüpteki suyun ağırlığı ihmal edilmiştir.

Özellikler Suyun yoğunluğu tüm alan için 1000 kg/m^{3}alınacaktır.

Analiz Kubbeyi ve içerisindeki suyu bir sistem olarak ele alalım. Kubbenin havaya kalktığı anda, kubbe ve yer arasındaki tepki kuvvetinin sıfır olması gerekmektedir. Bu da kubbenin ve suyun ağırlıklarının dahil edildiği sisteme ait serbest cisim diyagramının, hisdrostatik kuvvetler ile denge halinde olması demektir. Kuvvet toplamlarının sıfır olmasından yola çıkarsak;

$$\sum F_y = 0: \qquad F_{dikey} = W_{kubbe} + W_{su}$$

$$\rho g(h+R)\pi R^2 = m_{kubbe} g + m_{su} g$$

İfadede h yalnız bırakılırsa;

$$h = \frac{m_{kubbe} + m_{su}}{\rho \pi R^2} - R = \frac{m_{kubbe} + \rho[4\pi R^3/6]}{\rho \pi R^2} - R$$

Sadeleştirilirse,

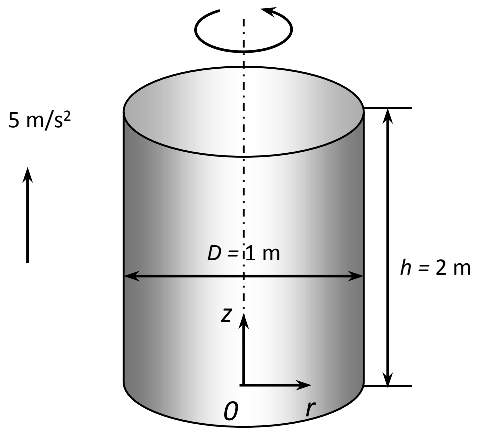
$$h = \frac{(50{,}000\,\text{kg}) + 4\pi(1000\,\text{kg/m}^3)(3\,\text{m})^3/6}{(1000\,\text{kg/m}^3)\pi(3\,\text{m})^2} - (3\,\text{m}) = \mathbf{0.77\ m}$$

Böylece kubbenin havaya kalması için gerekli olan su yükseliğinin 77 cm olduğu görülmektedir.

İrdeleme Dikkat edilirse küçük bir tüpe ilave edilen çok az miktarda bir su ile sudaki basınç çok büyük değişimlere uğramakta ve büyük yükler yavaşça kaldırılabilmektedir. Hidrolik krikolar ile büyük otomobillerin kaldırılması, buradaki durum ile kıyas edilebilir.

3-145 1 m çapında 2 m yüksekliğinde düşey bir silindir, yoğunluğu 740 kg/m^3 olan benzin ile doldurulmuştur. Tank, ekseni etrafında 90 devir/dakika'lık hızla döndürülürken aynı zamanda yukarı doğru 5 m/s^2 ile ivmelenmektedir. (a) silindirin taban ve tavan merkezleri arasındaki basınç farkını ve (b) taban merkezi ile taban kenarı arasındaki basınç farkını hesaplayınız.

ÇÖZÜM Düşey bir silindirik tank tamamen benzin ile doldurulmuştur ve tank dik eksende döndürülürken aynı zamanda dik eksende sabit bir ivme ile doğrusal olarak hızlanmaktadır. Üst ve alt merkez noktaları arasındaki basınç farkı ve en alt noktada merkez ile çevre arasındaki basınç farkı hesaplanacaktır.



Kabuller **1** Tank içerisindeki sıvının daima rijit cisim olarak hareket edebilmesi için dönme hızındaki artış çok yavaştır. **2** Benzin sıkıştırılamaz bir akışkandır.

Özellikler Benzinin yoğunluğu 740 kg/m^3 olarak verilmiştir.

Analiz Sıkıştırılamaz ve rijit cisim hareketi yaparak dönen bir akışkan için 1 ve 2 noktaları arasındaki basınç farkı;

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho g(z_2 - z_1)$$

olarak ifade edilir. Dik eksendeki sabit ivmenin etkisi ise g yerine $g + a_z$ yazılarak dikkate alınmış olur. Böylece,

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1)$$

olur. Yarıçap R = 0.50 m, ve açısal hız;

$$\omega = 2\pi\dot{n} = 2\pi(90\,\text{devir/dakika})\left(\frac{1\,\text{dakika}}{60\,\text{s}}\right) = 9.425\,\text{rad/s}$$

olur. (*a*) 1 ve 2 noktalarını sırasıyla merkez üzerindeki üst ve alt noktalar olarak alırsak $r_1 = r_2 = 0$ ve $z_2 - z_1 = h = 3\,\text{m}$'tür.

$$P_{\text{merkez, üst}} - P_{\text{merkez, alt}} = 0 - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1) = -\rho(g + a_z)h$$

$$= -(740\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2 + 5)(2\,\text{m})\left(\frac{1\,\text{kN}}{1000\,\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = 21.8\,\text{kN/m}^2 = \mathbf{21.9\ kPa}$$

bulunur.

(*b*) 1 ve 2 noktalarını sırasıyla alt yüzeydeki merkez noktası ve çevre noktası alırsak $r_1 = 0$, $r_2 = R$, ve $z_2 = z_1 = 0$ olur.

$$P_{\text{çevre, alt}} - P_{\text{merkez, alt}} = \frac{\rho\omega^2}{2}(R_2^2 - 0) - 0 = \frac{\rho\omega^2 R^2}{2}$$

$$= \frac{(740\,\text{kg/m}^3)(9.425\,\text{rad/s})^2(0.50\,\text{m})^2}{2}\left(\frac{1\,\text{kN}}{1000\,\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = 8.22\text{kN/m}^2 = \mathbf{8.22\ kPa}$$

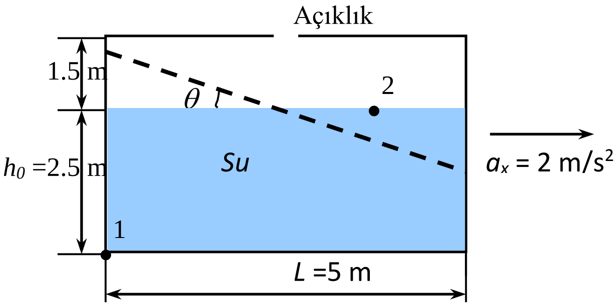
olarak elde edilir.

İrdeleme Dikkat edilirse tankın dönüşü eksen boyunca basınç değişimini etkilememektedir. Buna benzer şekilde dik yöndeki ivme, alt yüzeyde merkez ile çevre arasındaki basınç farkına etki etmemektedir. (Herhangi bir yatay yüzeydeki basınç farkına da etki etmemektedir)

3-146 5 m boyunda ve 4 m yüksekliğindeki dikdörtgen kesitli bir tankın içerisinde tank hareketsiz haldeyken 2.5 m derinliğinde su bulunmaktadır. Tank, üzerindeki orta noktada yer alan bir açıklık ile atmosfere açıktır. Düz bir yüzey üzerinde 2 m/s^2 ile sağa doğru ivmelendirildiğinde atmosferik basınca göre tank içerisindeki maksimum basıncın ne olacağını hesaplayınız.

ÇÖZÜM Su seviyesinde dikdörtgen kesitli ve üzeri atmosfere açık bir su tankı sağa doğru sabit bir ivmeyle hızlanmaktadır. Tank içerisinde atmosfer basıncının üzerinde olan maksimum basınç hesaplanacaktır.

Kabuller **1** Yol tam olarak yataydır. Bu yüzden hızlanma esnasında dik yonde herhangi bir ivme oluşmamaktadır (a_z = 0). **2** Sudaki çalkalanma, yoldaki pürüzlülük veya kasisler ikinci derecede önemlidir ve dikkate alınmamıştır. **3** Açıklık asla kapanmamıştır, böylece minimum su basıncı her zaman atmosferik basınçtır.



Özellikler Suyun yoğunluğu 1000 kg/m^3 olarak seçilmiştir.

Analiz x ekseni hareket ekseni ve z ekseni yukarıya doğru dik doğrultu ekseni seçilmiştir. Sıvı serbest yüzeyinin yatay eksen ile yaptığı açı;

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g + a_z} = \frac{2}{9.81 + 0} = 0.2039$$

Böylece θ = 11.5° bulunur.

Tanktaki maksimum su yükselmesi tankın hareket yönüne göre arkadaki kısmında olacaktır ve hızlanma sırasında tankın orta noktasında yükselme veya alçalma olmayacaktır. Tankın arka kısmındaki dikey yükselmenin, orta noktaya göre farkı;

$$\Delta z_{\max} = (L/2)\tan\theta = [(5\,\text{m})/2] \times 0.2039 = 0.510\,\text{m}$$

olarak bulunur. Bu yükseklik tankın tavan yüksekliği olan 1.5 m'den küçüktür. Yani su tank tavanına temas etmez ve maksimum yükseklik ve suyun en yüksek olduğu kısımın en dibindeki maksimum basınç;

$$h_{\max} = h_0 + \Delta z_{\max} = 2.50 + 0.510 = 3.01\,\text{m}$$

$$P_{\max} = P_1 = \rho g h_{\max} = (1000\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)(3.01\,\text{m})\left(\frac{1\,\text{kN}}{1000\,\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = 29.5\,\text{kN/m}^2 = \mathbf{29.5\ kPa}$$

olarak hesaplanabilir.

İrdeleme Tankın en dibinde etkin basıncın soldan sağa doğru 29.5 kPa'dan orta noktada 24.5 kPa olacak şekilde 19.5 kPa'ya kadar azaldığı gösterilebilir.